



SUITES ET RECURRENCE - COURS



I. LES SUITES : DÉFINITIONS

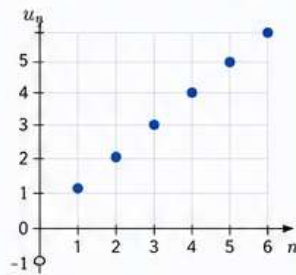
Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang) à valeurs réelles.

On la note (u_n) .

u_n est appelé le terme de rang n .

Exemples :

- $u_n = 2n + 1$
- $u_n = n^2 - 3n$
- $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$
(suite définie par récurrence)



II. MODES DE DÉFINITION D'UNE SUITE

1) Suite explicite

Le terme général u_n est donné en fonction de n .

Exemple : $u_n = n^2 - 3n + 2$

On peut calculer directement n'importe quel terme.

2) Suite définie par récurrence

On connaît le premier terme u_0 (ou u_1) et une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent.

Exemple : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$

On calcule successivement $u_1, u_2, u_3, \dots$

III. RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Principe

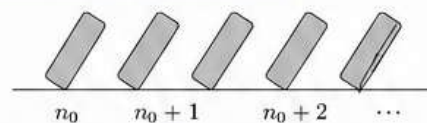
Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ (n_0 entier naturel fixé), on procède en deux étapes :

- 1 **Initialisation** : on démontre que la propriété est vraie au rang n_0 .
- 2 **Hérédité** : on démontre que pour tout entier $k \geq n_0$, si la propriété est vraie au rang k , alors elle est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion

Si l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Schéma (idée des dominos)



- Le domino n_0 tombe (initialisation)
 - Si le domino k tombe, alors le domino $k + 1$ tombe (hérédité)
- ⇒ Tous les dominos tombent !

IV. VARIATIONS D'UNE SUITE

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est croissante si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- (u_n) est décroissante si pour tout n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- (u_n) est constante si pour tout n , $u_{n+1} - u_n = 0$.

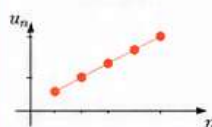
Méthode pour étudier les variations

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) :

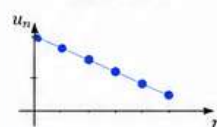
- 1 Calculer $u_{n+1} - u_n$.
- 2 Factoriser et étudier son signe.
- 3 En déduire le sens de variation de (u_n) .

Signe de $u_{n+1} - u_n$

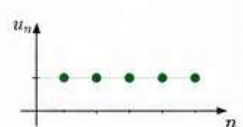
$u_{n+1} - u_n > 0$
Suite strictement croissante



$u_{n+1} - u_n < 0$
Suite strictement décroissante



$u_{n+1} - u_n = 0$
Suite constante



Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2n$.

On calcule $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 + 2(n+1)] - (n^2 + 2n) = 2n + 3$.

Or $2n + 3 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

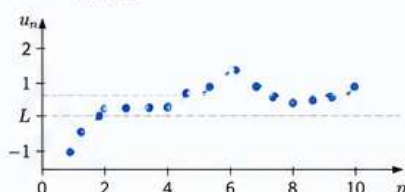
V. LIMITES DE SUITES

1) Limite finie

On dit que (u_n) admet pour limite L si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$,

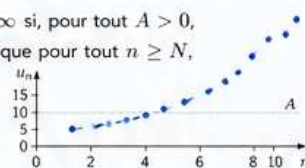
$$|u_n - L| < \varepsilon.$$

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

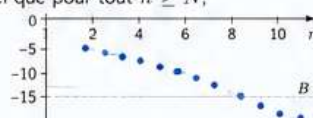


2) Limite infinie

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$.



$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si, pour tout $B < 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n < B$.



3) Exemples usuels

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$

À RETENIR



- ✓ Le signe de $u_{n+1} - u_n$ permet de déterminer les variations d'une suite.
- ✓ Le raisonnement par récurrence est un outil puissant pour démontrer des propriétés pour tout n .
- ✓ Une suite peut converger vers un réel, vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou ne pas avoir de limite.



VI. LIMITES USUELLES

Suite (u_n)	Condition	Limite
Suite constante : $u_n = c$	$c \in \mathbb{R}$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = c$
$u_n = n$	—	$+\infty$
$u_n = \sqrt{n}$	—	$+\infty$
$u_n = q^n$	$q > 1$	$+\infty$
	$-1 < q < 1$	0
$u_n = \frac{1}{n}$	$n \geq 1$	0
$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 0$	0
$u_n = an + b$	$a \neq 0$	$+\infty$ si $a > 0$
		$-\infty$ si $a < 0$

Remarque

Cette liste n'est pas exhaustive mais regroupe les limites les plus fréquemment rencontrées.

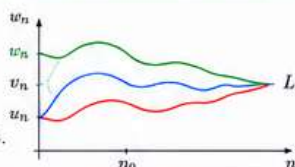
VIII. THÉORÈMES UTILES SUR LES SUITES

Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang n_0 , on a :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

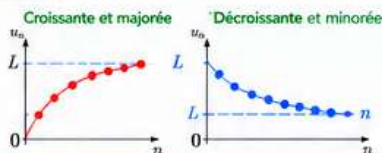
et si $\lim u_n = \lim w_n = L$ alors $\lim v_n = L$.



Théorème de convergence monotone

Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.



Théorème de la limite d'une suite et opérations

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L'$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = L + L'$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n) = \lambda L \text{ pour tout réel } \lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = LL'$$

Si $L' \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{L'}$

Remarque

Ces théorèmes sont valables si les limites considérées existent et ne conduisent pas à une forme indéterminée.



VII. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

1) Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L'	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée.

2) Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	$+\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	LL'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	F.I.*

3) Limite d'un quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.*	F.I.*

Remarque : Les formes indéterminées fréquentes sont :

$$0 \times \infty, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, 0 \times 0^\infty.$$

IX. THÉORÈMES DE MAJORATION ET MINORATION

Théorème de minoration

Si, à partir d'un certain rang n_0 , on a :

$$u_n \leq v_n$$

et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Théorème de majoration

Si, à partir d'un certain rang n_0 , on a :

$$u_n \geq v_n$$

et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$,

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

X. ÉTUDE DU SIGNE DE $u_{n+1} - u_n$ ET VARIATIONS

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) , on considère la suite de différences $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- Si $v_n > 0$ pour tout n à partir d'un certain rang : alors (u_n) est strictement croissante.

- Si $v_n < 0$ pour tout n à partir d'un certain rang : alors (u_n) est strictement décroissante.

- Si $v_n = 0$ pour tout n à partir d'un certain rang : alors (u_n) est constante.

Méthode

- Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
- Factoriser ou mettre sous forme simplifiée.
- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Conclure sur les variations de (u_n) .



À RETENIR

- ✓ Le signe de $u_{n+1} - u_n$ donne directement les variations d'une suite.
- ✓ Le raisonnement par récurrence est un outil puissant pour démontrer des propriétés pour tout n .
- ✓ Savoir reconnaître les formes indéterminées est essentiel lors d'études de limites.

