

- Suite croissante et majorée
- Suite décroissante et minorée
- Théorème de convergence monotone
- Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Suite croissante et majorée

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}.$$

- 1 Calculer u_1, u_2 et u_3 .
- 2 Conjecturer les variations de (u_n) et un majorant possible.
- 3 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
- 4 Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}$.
- 5 En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 6 Justifier que la suite (u_n) est majorée.
- 7 Conclure que la suite (u_n) converge (en précisant le théorème utilisé).



2 Suite décroissante et minorée

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 5 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{2}.$$

- 1 Calculer v_1, v_2 et v_3 .
- 2 Conjecturer les variations de (v_n) et un minorant possible.
- 3 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $v_n \geq 3$.
- 4 Montrer que $v_{n+1} - v_n = \frac{3 - v_n}{2}$.
- 5 En déduire que la suite (v_n) est décroissante.
- 6 Justifier que la suite (v_n) est minorée.
- 7 Conclure que la suite (v_n) converge (en précisant le théorème utilisé).



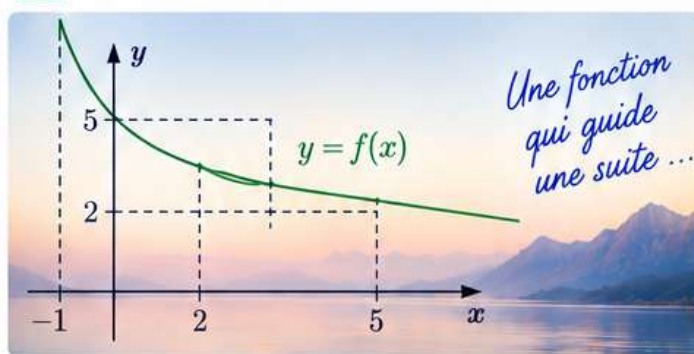
3 Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+4}{x+1}$$

et la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1 Étudier les variations de f sur $] -1 ; +\infty[$.
- 2 Pour tout $x \in [2 ; 5]$, montrer que $f(x) \in [2 ; 5]$.
- 3 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $2 \leq u_n \leq 5$.
- 4 En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 5 Justifier que la suite (u_n) converge (en précisant le théorème utilisé).
- 6 (Facultatif) Conjecturer la limite de la suite.



4 Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 20$.

- 1 Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- 2 Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 10$.
- 3 Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- 5 Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier la réponse.

