



SUITES ET RÉCURRENCE

FICHE D'EXERCICES #5

Thèmes abordés :

- Utiliser le théorème des gendarmes, de majoration ou de minoration
- Montrer qu'une suite est croissante et majorée

1 Théorème des gendarmes

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite définie (pour n assez grand si nécessaire).

1 $u_n = \frac{\sin n}{n}$

2 $v_n = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}}$

3 On sait que, pour tout $n \geq 1$,
 $2 - \frac{3}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{5}{n}$.
 Déterminer la limite de (w_n) .

4 $u_n = \frac{n + \sin n}{n + 1}$

a) Encadrer u_n .

b) En déduire la limite de (u_n) .



2 Théorèmes de minoration et de majoration

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) , (v_n) , (w_n) ou (t_n) en utilisant un théorème de minoration ou de majoration.

1 On sait que, pour tout $n \geq 1$,
 $u_n \geq n^2 - 3n$.

Déterminer la limite de (u_n) .

2 $v_n = -n^2 + 4 \sin n$.

À l'aide d'une majoration, déterminer la limite de (v_n) .

3 $w_n = n + \cos n$.

a) Trouver une suite simple qui minore w_n .

b) En déduire la limite de (w_n) .

4 $t_n = -2n + \sin(n)$.

a) Trouver une suite simple qui majore t_n .

b) En déduire la limite de (t_n) .



3 Suite croissante et majorée

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}.$$

1 Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2 Conjecturer les variations de (u_n) et un majorant possible.

3 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_n \leq 3$.



4 Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n}{2}$.

5 En déduire que la suite (u_n) est croissante.

6 Justifier que la suite (u_n) converge.



4 Synthèse

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 3}.$$

1 Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

2 Conjecturer les variations de (v_n) et sa limite.

3 Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $v_n < 3$.

4 Montrer que
 $v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - 3)(v_n + 1)}{\sqrt{2v_n + 3} + v_n}$.



5 En déduire que la suite (v_n) est croissante.

6 Montrer qu'elle converge.



À RETENIR

- ✓ Le théorème des gendarmes permet de déterminer une limite par encadrement.
- ✓ Les théorèmes de minoration et de majoration permettent de conclure à une limite infinie.
- ✓ Une suite croissante et majorée est convergente.

