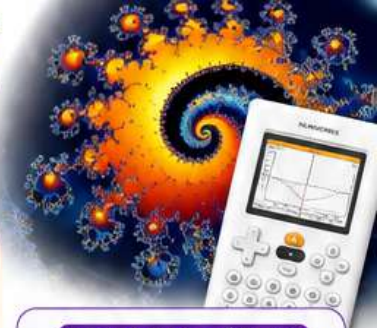




OBJECTIFS DE LA FICHE

- ✓ Maîtriser des démonstrations par récurrence plus techniques.
- ✓ Utiliser la récurrence pour prouver des égalités, des inégalités et des propriétés de divisibilité.
- ✓ Structurer une démonstration complète et rigoureuse.



RAPPEL : PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- 1 Initialisation : on montre que $P(n_0)$ est vraie.
- 2 Hérédité : on montre que, pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- 3 Conclusion : on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

MÉTHODE EN 3 ÉTAPES

- 1 Initialisation
- 2 Hérédité
- 3 Conclusion

1 ÉGALITÉS : DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1).$$

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

2 INÉGALITÉS : DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $0 < u_n < 1$.

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ pour tout réel } x \geq 0.$$

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

3 AUTRES PROPRIÉTÉS : DIVISIBILITÉ PAR RÉCURRENCE

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
7 divise $4^n - 1$.

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,
 $3^n - 1$ est divisible par 2.

1. Initialisation :

.....

2. Hérédité :

.....

3. Conclusion :

.....

.....

Rappel utile

Si a divise b et a divise c
alors a divise :

- $b + c$
- $b - c$
- kb (avec $k \in \mathbb{Z}$)

Si a divise 1
alors $a = \pm 1$.



★ BILAN DE LA FICHE :

Je sais prouver des égalités
par récurrence.



Je sais prouver des inégalités
par récurrence.



Je sais utiliser la récurrence pour des
propriétés de divisibilité.

