

1 Calcul d'un terme

On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n$.

$$u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = -0,02 + 1,3 = \mathbf{1,28}$$

$$u_2 = -0,02 \times 1,28^2 + 1,3 \times 1,28 = -0,02 \times 1,6384 + 1,664 \\ = -0,032768 + 1,664 = \mathbf{1,631232}$$

$$u_3 = -0,02 \times 1,631232^2 + 1,3 \times 1,631232 \\ = -0,02 \times 2,660915 + 2,1206016 = -0,0532183 + 2,1206016 \\ = \mathbf{2,0673833}$$

Ainsi $u_1 = 1,28$, $u_2 \approx 1,631$ et $u_3 \approx 2,067$ (en hectares).



2 Étude de la suite (u_n)

a Encadrement des termes par récurrence

On considère la propriété P :

« Pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$. »

• Initialisation :

$u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$ (question 1).

Donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20$.

La propriété P est vraie au rang initial.

• Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang n , n entier naturel fixé :
 $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

La fonction h est croissante sur $[0 ; 20]$ et $u_{n+1} \in [1 ; 20]$,
ainsi en appliquant h à la double inégalité :

$$1 \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq 20,$$

c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$.

La propriété P est donc vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a

$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ pour tout entier naturel n .

b Convergence de la suite

D'après 2.a, la suite (u_n) est croissante.

De plus, on a $1 \leq u_n \leq 20$ pour tout n , donc (u_n) est majorée par 20.

Une suite croissante et majorée est convergente.

On note L sa limite.

c Calcul de la limite

On admet que la limite L vérifie l'équation $h(L) = L$, soit :

$$\left. \begin{array}{l} -0,02L^2 + 1,3L = L \\ -0,02L^2 + 0,3L = 0 \\ L(-0,02L + 0,3) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Donc } L = 0 \text{ ou} \\ L = \frac{0,3}{0,02} = 15. \end{array}$$

Or d'après 2.a, $1 \leq u_n \leq 20$ pour tout n ,
donc $L \in [1 ; 20]$.

Ainsi $L = 15$.

La limite de la suite (u_n) est $L = 15$.

3 Dépassement du seuil des 14 hectares

a Justification

La suite (u_n) est croissante et converge vers 15 (question 2.c).

Comme $14 < 15$, il existe donc un rang à partir duquel $u_n > 14$.

La surface couverte par la posidonie dépassera donc 14 hectares
au bout d'un certain nombre d'années.

b Algorithme

On complète l'algorithme pour qu'il s'arrête dès que la surface
dépasse 14 hectares.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 14 :
        n = n + 1
        u = -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

À la fin d'exécution,
l'algorithme affiche
le plus petit entier n
tel que $u_n > 14$.



Bilan

- Utiliser une suite récurrente pour modéliser une situation réelle.
- Encadrer une suite par récurrence.
- Exploiter les propriétés des suites monotones.
- Résoudre une équation pour déterminer une limite.
- Utiliser un algorithme pour répondre à une question concrète.

Modéliser
aujourd'hui
pour préserver
demain !

