

Les maths
sont des clés
qui ouvrent
de grands horizons!

SUITES ET RÉCURRENCE

CORRIGÉ - Exercice de synthèse #2

Chercher, raisonner, démontrer ... progresser!

✓ Modéliser
✓ Calculer
✓ Raisonner
✓ Démontrer
✓ Conclure

Une suite
d'efforts pour
de grands
résultats!

Étude d'une suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}.$$

1 Calcul des premiers termes et conjecture

$$\begin{aligned} u_0 &= 1. \\ u_1 &= \frac{3 \times 1 + 4}{1 + 3} = \frac{7}{4} = 1,75. \\ u_2 &= \frac{3 \times \frac{7}{4} + 4}{\frac{7}{4} + 3} = \frac{\frac{21}{4} + 4}{\frac{19}{4}} = \frac{37}{19} \approx 1,947. \\ u_3 &= \frac{3 \times \frac{37}{19} + 4}{\frac{37}{19} + 3} = \frac{\frac{111}{19} + 4}{\frac{94}{19}} = \frac{187}{94} \approx 1,989. \end{aligned}$$

On conjecture que la suite (u_n) est **croissante** et semble **se rapprocher de 2**.

2 Étude de la fonction f et encadrement par récurrence

a) Soit $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Sur $[1; 2]$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{3(x+3) - (3x+4)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2} > 0$.
Donc f est croissante sur $[1; 2]$.

On calcule $f(1) = \frac{7}{4} = 1,75$ et $f(2) = \frac{10}{5} = 2$.

Ainsi, pour tout $x \in [1; 2]$, $1,75 \leq f(x) \leq 2$, en particulier $f(x) \in [1; 2]$.

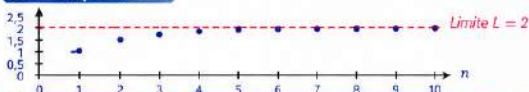
b) On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1; 2]$.

Hérédité : supposons $1 \leq u_n \leq 2$. Alors, d'après la question a), $f(u_n) \in [1; 2]$, donc $u_{n+1} \in [1; 2]$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.

Évolution des premiers termes



Les termes de la suite sont **croissants** et se **rapprochent** de la valeur **2**.

3 Différence de deux termes et sens de variation

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} \\ &= \frac{3u_n + 4 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} = \frac{4 - u_n^2}{u_n + 3}. \end{aligned}$$

Or, $1 \leq u_n \leq 2$ donc $4 - u_n^2 \geq 0$ et $u_n + 3 > 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, avec égalité seulement si $u_n = 2$. La suite (u_n) est donc croissante.

Comme $u_0 = 1 < 2$, la suite est **strictement croissante**.

4 Convergence

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 (d'après la question 2.b). D'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

5 Détermination de la limite

Soit L la limite de la suite (u_n) . En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$L = \frac{3L + 4}{L + 3}.$$

Soit $L + 3 > 0$ (car $L \in [1; 2]$). Alors $L(L + 3) = 3L + 4$, soit

$$L^2 + 3L = 3L + 4 \iff L^2 = 4.$$

Comme $L \in [1; 2]$, on obtient $L = 2$.

La suite (u_n) se rapproche de 2 par valeurs inférieures.

6 Pour aller plus loin : une expression explicite

a) On pose $v_n = \frac{2 - u_n}{2 + u_n}$. Montrons que (v_n) est géométrique.

$$v_{n+1} = \frac{2 - u_{n+1}}{2 + u_{n+1}} = \frac{2 - \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}}{2 + \frac{3u_n + 4}{u_n + 3}} = \frac{-u_n + 2}{5(u_n + 2)} = -\frac{1}{5} \frac{2 - u_n}{2 + u_n} = -\frac{1}{5} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{5}$.

b) $v_0 = \frac{2 - u_0}{2 + u_0} = \frac{1}{3}$, donc $v_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$.

Une expression explicite de u_n pour tout n !

$$\text{c) On a } \frac{2 - u_n}{2 + u_n} = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n. \text{ D'où } u_n = \frac{2 - v_n}{2 + v_n} = \frac{2 - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{6 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{6 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n}.$$

Les mathématiques : des sommets à atteindre!

Terminale spécialité
Mathématiques