

- ✓ Modéliser
- ✓ Chercher
- ✓ Calculer
- ✓ Raisonner
- ✓ Conclure

SUITES ET RÉCURRENCE

CORRIGÉ – EXERCICE DE SYNTHÈSE #1

Des situations concrètes
pour s'exercer ...
et progresser !

Les maths
au service
du réel !

Quantité de médicament dans le sang

Corrigé détaillé – Bac spécialité mathématiques – Asie, 17 mai 2022 – Exercice 2, Partie A (modèle discret)

Rappel de l'énoncé :

- $u_0 = 1$
- $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$

On utilise uniquement
la calculatrice, la programmation
et les tableaux de valeurs.
Aucun calcul avancé n'est nécessaire.

- 1** 1
 $u_1 = 0,9u_0 + 0,25 = 0,9 \times 1 + 0,25 = 1,15$.
- 2** 2
Au bout de n périodes de 30 minutes, la quantité de médicament dans le sang est u_n .
Pendant les 30 minutes suivantes, l'organisme élimine 10 % de cette quantité, il en reste donc 90 %, soit $0,9u_n$.
On ajoute ensuite 0,25 mg de médicament.
Ainsi, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = 0,9u_n + 0,25$.
- 3** 3 a) Initialisation : $u_0 = 1 \leq u_1 = 1,15$ et $u_1 < 5$.
La propriété est vraie au rang initial.
Hérédité : on suppose que, pour un entier naturel n ,
 $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
On multiplie toute l'inégalité par 0,9 (nombre positif) :
 $0,9u_n \leq 0,9u_{n+1} < 0,9 \times 5$.
On ajoute 0,25 à chaque membre :
 $0,9u_n + 0,25 \leq 0,9u_{n+1} + 0,25 < 4,75$.
Donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 5$.
La propriété est vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : d'après le principe de récurrence,
pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
- 3 b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 5,
donc elle est convergente.

4 4 a)

```
def efficace():  
    u = 1  
    n = 0  
    while u < 1.8 :  
        u = 0.9*u + 0.25  
        n = n + 1  
    return n
```

4 b) Valeur renvoyée : $n = 8$.
On obtient notamment :

n	6	7	8
u_n	1,7029	1,7826	1,8544

$u_7 \approx 1,7826 < 1,8$ et $u_8 \approx 1,8544 > 1,8$.
Le médicament est réellement efficace après
8 périodes de 30 minutes, soit 4 heures.



8 périodes
de 30 minutes
= 4 heures

- 5** 5 a) On pose $v_n = 2,5 - u_n$.
Alors $v_{n+1} = 2,5 - u_{n+1} = 2,5 - (0,9u_n + 0,25) = 2,5 - 0,9u_n - 0,25$.
Or $u_n = 2,5 - v_n$, donc $v_{n+1} = 2,5 - 0,9(2,5 - v_n) - 0,25 = 0,9v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.
Son premier terme est $v_0 = 2,5 - u_0 = 2,5 - 1 = 1,5$.
- b) Pour tout entier naturel n ,
 $v_n = 1,5 \times 0,9^n$,
donc $u_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.
- c) La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9
avec $|0,9| < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
Par conséquent,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2,5 - 1,5 \times 0,9^n) = 2,5$.
Comme la suite (u_n) est croissante et converge vers 2,5,
on en déduit que, pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.

Les mathématiques éclairent le réel !

Comprendre aujourd'hui
pour mieux soigner demain !