

SUITES ET RÉCURRENCE

FICHE D'EXERCICES #6

CORRIGÉ

Comprendre
aujourd'hui
pour réussir demain...

Rappels utiles :

- Suite croissante et majorée $\Rightarrow$ convergente
- Suite décroissante et minorée $\Rightarrow$ convergente
- Théorème de convergence monotone
- Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Suite croissante et majorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

$$1 \quad u_1 = \frac{2 \times 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}, \quad u_2 = \frac{2u_1 + 3}{u_1 + 2} = \frac{19}{11}, \quad u_3 = \frac{2u_2 + 3}{u_2 + 2} = \frac{71}{41}.$$

2 Les premiers termes sont croissants et semblent se rapprocher de $\sqrt{3} \approx 1,732$.

3 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $1 \leq 1 \leq \sqrt{3}$.

Donc la propriété est vraie au rang initial.

- **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n , $n \in \mathbb{N}$ fixé, $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \geq \frac{2 \times 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3} > 1$$

$$\text{et } u_{n+1} \leq \frac{2\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3} + 2} = \sqrt{3}.$$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$ et elle est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

$$4 \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - \sqrt{3})}{u_n + 2}.$$

Or $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ donc $(u_n - 1) \geq 0$, $(u_n - \sqrt{3}) \leq 0$ et $u_n + 2 > 0$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

5 La suite (u_n) est donc croissante.

6 D'après la question 3, (u_n) est majorée par $\sqrt{3}$.

7 La suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

2 Suite décroissante et minorée

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{2}$.

$$1 \quad v_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad v_2 = \frac{4 + 3}{2} = 3,5, \quad v_3 = \frac{3,5 + 3}{2} = 3,25.$$

2 Les premiers termes sont décroissants et semblent se rapprocher de 3.

3 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 3$.

- **Initialisation** : $v_0 = 5 \geq 3$.

Donc la propriété est vraie au rang initial.

- **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n , $n \in \mathbb{N}$ fixé, $v_n \geq 3$.

$$\text{Alors } v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{2} \geq \frac{3 + 3}{2} = 3.$$

Donc $v_{n+1} \geq 3$.

Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$ et elle est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 3$.

$$4 \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - v_n = \frac{3 - v_n}{2}.$$

5 Comme $v_n \geq 3$, on a $3 - v_n \leq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
La suite (v_n) est donc décroissante.

6 D'après la question 3, (v_n) est minorée par 3.

7 La suite (v_n) est décroissante et minorée, donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

3 Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$
et la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$1 \quad f \text{ est dérivable sur }]-1; +\infty[\text{ et } f'(x) = \frac{(x+1) - (x+4)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$.

$$2 \quad \text{Pour tout } x \in [2; 5], \quad f(x) = \frac{x+4}{x+1}. \text{ Comme } f \text{ est décroissante,}$$

$$f(5) \leq f(x) \leq f(2), \text{ soit } \frac{9}{6} \leq f(x) \leq \frac{6}{3}, \text{ donc } \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 2.$$

$$\text{Ainsi, si } x \in [2; 5], \text{ alors } f(x) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \subset [2; 5].$$

3 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 5$.

- **Initialisation** : $u_0 = 2 \in [2; 5]$. Donc la propriété est vraie au rang initial.

- **Hérédité** : supposons la propriété vraie au rang n , $n \in \mathbb{N}$ fixé, $2 \leq u_n \leq 5$.

Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [2; 5]$ d'après la question 2.

Donc $2 \leq u_{n+1} \leq 5$.

Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$ et elle est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 5$.

4 Comme f est décroissante et $u_0 = 2$, on a $f(u_0) \leq u_0$, donc $u_1 \leq u_0$.
Plus généralement, si $u_n \geq u_{n-1}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n-1}) = u_n$.
Donc (u_n) est décroissante.

5 La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge (théorème de convergence monotone).

6 (Facultatif) On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

4 Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 20$.

$$1 \quad u_1 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 25, \quad u_2 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 22,5.$$

$$2 \quad \text{On a } v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \frac{1}{2}u_n + 10 - 20 = \frac{1}{2}(u_n - 20) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20 = 10$.

$$3 \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4 On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 20 = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$5 \quad \text{Comme } 0 < \frac{1}{2} < 1, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$.

La suite (u_n) converge vers 20.

