



OBJECTIFS DE LA FICHE

- ✓ Maîtriser des démonstrations par récurrence plus techniques.
- ✓ Utiliser la récurrence pour prouver des égalités, des inégalités et des propriétés de divisibilité.
- ✓ Structurer une démonstration complète et rigoureuse.



RAPPEL : PRINCIPE DE RÉCURRENCE

Pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : on montre que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : on montre que, pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

MÉTHODE EN 3 ÉTAPES

1. Initialisation
2. Hérédité
3. Conclusion

1 ÉGALITÉS : DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Initialisation :

Pour $n = 0$:

$$1 + 2 + \dots + 0 = 0$$

$$\text{et } \frac{0(0+1)}{2} = 0.$$

L'égalité est vraie au rang 0.

2. Hérédité :

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1. Initialisation :

Pour $n = 0$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 0^2 = 0$$

$$\text{et } \frac{0(0+1)(2 \times 0 + 1)}{6} = 0.$$

L'égalité est vraie au rang 0.

2. Hérédité :

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1).$$

1. Initialisation :

Pour $n = 1$:

$$2^1 - 1 = 1$$

$$\text{et } (2-1)(2^0) = 1.$$

L'égalité est vraie au rang 1.

2. Hérédité :

Supposons que, pour un $n \geq 1$, on ait

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1) \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1. \end{aligned}$$

Alors, au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 1 &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1) + 1 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \dots + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^1 + 2^0 \\ &= (2-1)(2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + 1). \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n - 1 = (2-1)(2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + 1).$$

2 INÉGALITÉS : DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{3}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

1. Initialisation : $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 1$.2. Hérédité : Supposons $0 < u_n < 1$.

$$\text{Alors } 0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < u_n + 2 < 3$$

$$\text{En divisant par 3 : } 0 < \frac{u_n + 2}{3} < 1.$$

$$\text{Donc } 0 < u_{n+1} < 1.$$

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

1. Initialisation : $1! = 1 = 2^0$ donc $1! \geq 2^0$.2. Hérédité : Supposons $n! \geq 2^{n-1}$.

$$\text{Alors } (n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1}.$$

$$\text{Or, pour } n \geq 1, n+1 \geq 2$$

$$\text{Donc } (n+1)! \geq 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$.

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ pour tout réel } x \geq 0.$$

1. Initialisation : $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$.2. Hérédité : Supposons $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x \\ &\quad (\text{car } x \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \text{ donc } nx^2 \geq 0). \end{aligned}$$

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

3 AUTRES PROPRIÉTÉS : DIVISIBILITÉ PAR RÉCURRENCE

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $4^n - 1$.

1. Initialisation : $n = 0$: $4^0 - 1 = 0$ qui est divisible par 7.2. Hérédité : Supposons $7 \mid (4^n - 1)$, c'est-à-dire $4^n - 1 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors } 4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 4 \times 7k + 3 = 7(4k) + 3.$$

$$\text{Or } 4 \equiv -3 \pmod{7} \text{ donc } 4^2 \equiv 2 \pmod{7} \text{ et } 4^3 \equiv -1 \pmod{7} \text{ et } 4^4 \equiv 1 \pmod{7}.$$

$$\text{Ainsi } 4^n \equiv 1 \pmod{7} \text{ si } n \text{ est multiple de 4, et } 4^{n+1} \equiv 4 \pmod{7} \text{ si } n \text{ n'est pas multiple de 4.}$$

$$\text{Mais plus simplement : } 4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3 \text{ et } 4 \equiv -3 \pmod{7}.$$

$$\text{donc } 4(4^n - 1) + 3 \equiv -3(4^n - 1) + 3 \pmod{7} \text{ et } 4 \equiv -3 \pmod{7}.$$

$$\text{Donc } 7 \mid (4^{n+1} - 1).$$

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $4^n - 1$.

c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $3^n - 1$ est divisible par 2.

1. Initialisation : $n = 1$: $3^1 - 1 = 2$ qui est divisible par 2.2. Hérédité : Supposons $2 \mid (3^n - 1)$, c'est-à-dire $3^n - 1 = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Alors } 3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1 = 3(3^n - 1) + 2 =$$

$$3 \times 2k + 2 = 2(3k + 1).$$

3. Conclusion :

Par récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$3^n - 1 \text{ est divisible par 2.}$$

Rappel utile

Si a divise b et a divise c alors a divise :

$$a) b + c \quad b) b - c$$

$$c) kb \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Si a divise 1 alors $a = \pm 1$.

