

Le tournoi d'échecs

A Constituer le groupe de finalistes

1 Combien de groupes de 5 finalistes peut-on former parmi les 16 joueurs ?

On choisit 5 joueurs parmi 16 sans tenir compte de l'ordre.

$$\binom{16}{5} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4\,368$$

Il y a **4 368** groupes de 5 finalistes.

2 Combien de groupes de 5 finalistes contiennent exactement 2 joueurs du club A ?

On choisit 2 joueurs parmi les 6 du club A et 3 joueurs parmi les 10 du club B.

$$\binom{6}{2} \times \binom{10}{3} = 15 \times 120 = 1\,800$$

Il y a **1 800** groupes.

3 Combien de groupes de 5 finalistes contiennent au moins un joueur du club A ?

On utilise le complémentaire : « au moins un joueur du club A » = 1 - « aucun joueur du club A ».

Nombre de groupes sans joueur du club A : on choisit 5 joueurs parmi les 10 du club B.

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

Donc : $4\,368 - 252 = 4\,116$

Il y a **4 116** groupes.

4 Combien de groupes de 5 finalistes contiennent davantage de joueurs du club B que du club A ?

Il y a davantage de joueurs du club B que de joueurs du club A si le groupe contient 0, 1 ou 2 joueurs de A.

On additionne les trois cas :

- 0 joueur de A : $\binom{10}{5} = 252$
- 1 joueur de A : $\binom{6}{1} \times \binom{10}{4} = 6 \times 210 = 1\,260$
- 2 joueurs de A : $\binom{6}{2} \times \binom{10}{3} = 15 \times 120 = 1\,800$

Total : $252 + 1\,260 + 1\,800 = 3\,312$

Il y a **3 312** groupes.

B Le classement

5 Combien de classements complets différents des cinq finalistes peut-on obtenir ?

Il s'agit d'ordonner les 5 joueurs : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Il y a **120** classements.

6 Seuls les trois premiers montent sur le podium. Combien de podiums différents peut-on obtenir ?

On choisit et on ordonne 3 joueurs parmi les 5 : $A(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (ou $\frac{5!}{(5-3)!}$)

Il y a **60** podiums.

7 Parmi les cinq finalistes se trouve Léa. Combien existe-t-il de podiums dans lesquels Léa apparaît ?

Léa peut être 1^{re}, 2^e ou 3^e (3 possibilités).

Pour chaque position, on ordonne les deux autres places avec 4 joueurs restants :

$$A(4, 2) = 4 \times 3 = 12$$

Total : $3 \times 12 = 36$

Il y a **36** podiums avec Léa.

C Les codes des joueurs

8 Combien de codes différents peut-on créer ?

Premier chiffre : 9 choix (1 à 9).

Deuxième chiffre : 9 choix (0 à 9 sauf le premier).

Troisième chiffre : 8 choix. Quatrième chiffre : 7 choix.

Total : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$

Il y a **4 536** codes différents.

9 Combien de codes commencent par un chiffre pair non nul ?

Le premier chiffre peut être 2, 4, 6 ou 8 (4 choix). Les trois autres chiffres : 9, 8 et 7 choix.

Total : $4 \times 9 \times 8 \times 7 = 2\,016$

Il y a **2 016** codes qui commencent par un chiffre pair non nul.

10 On affirme : « Plus de la moitié des codes possibles contiennent le chiffre 0. » Vrai ou faux ?

On compte les codes contenant 0. Le 0 ne peut pas être en première position.

On choisit la position du 0 : 3 possibilités (2^e, 3^e ou 4^e).

Les trois autres chiffres sont choisis parmi 1 à 9 sans répétition : $9 \times 8 \times 7 = 504$.

Total : $3 \times 504 = 1\,512$ codes contenant 0.

Or $1\,512 < \frac{4\,536}{2} = 2\,268$. Donc il y en a **moins de la moitié**.

L'affirmation est **fausse**.
Seuls **1 512** codes (soit environ 33 %) contiennent le chiffre 0.

Rappel

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n}{p}$: « n parmi p » (sans ordre)



Rappel

$$A(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

(ordre important)



Bilan

- Pour former un groupe : on utilise des combinaisons $\binom{n}{p}$ (l'ordre ne compte pas).
- Pour un classement ou un podium : on utilise des permutations ou arrangements (l'ordre compte).
- Pour des questions « au moins un », « davantage que », on peut raisonner par complémentaire ou ajouter les cas.
- Il faut toujours vérifier les contraintes (chiffres distincts, première position, etc.).

Des méthodes
des calculs
et de la logique
pour réussir !