

Corrigé – Exercices de Synthèse #2

Combinatoire et dénombrement

Des solutions détaillées ... pour progresser !

Les maths ouvrent
des perspectives !

Exercice 1 – Une compétition scientifique

Un concours de culture scientifique est organisé dans un lycée. Il réunit 18 candidats : 10 filles et 8 garçons. À l'issue des épreuves, un jury doit sélectionner 6 finalistes qui participeront à la finale.

- 1 Nombre de groupes de 6 finalistes parmi 18 candidats.

On choisit 6 candidats parmi 18, sans tenir compte de l'ordre :

$$\binom{18}{6} = \frac{18!}{6! 12!} = 18\,564.$$

Il y a 18 564 groupes.

- 2 Groupes comportant exactement 4 filles.

On choisit 4 filles parmi les 10, et 2 garçons parmi les 8 :

$$\binom{10}{4} \times \binom{8}{2} = 210 \times 28 = 5\,880.$$

Il y a 5 880 groupes.

- 3 Groupes comportant au moins une fille.

On calcule par complément. Le seul cas à exclure est celui où il n'y a aucune fille (c'est-à-dire 6 garçons parmi 8) :

$$\binom{18}{6} - \binom{8}{6} = 18\,564 - 28 = 18\,536.$$

Il y a 18 536 groupes.



- 4 Podiums (1^{er}, 2^e, 3^e prix) parmi les 6 finalistes.

On choisit et on ordonne 3 candidats parmi les 6 finalistes :

$$6 \times 5 \times 4 = \frac{6!}{3!} = 120.$$

Il y a 120 podiums.

- 5 Podiums dans lesquels Léa apparaît (parmi les 6 finalistes).

On distingue la position de Léa dans le podium.

• Léa est 1^{re} : on choisit et on ordonne les 2 autres parmi 5 : $5 \times 4 = 20$.

• Léa est 2^e : $5 \times 4 = 20$.

• Léa est 3^e : $5 \times 4 = 20$.

Donc au total : $20 + 20 + 20 = 60$.

Il y a 60 podiums.

Exercice 2 – Une médiathèque numérique

Une plateforme de ressources éducatives met à disposition 15 documentaires différents :

- 6 documentaires scientifiques ;
- 5 documentaires historiques ;
- 4 documentaires consacrés aux arts.

Un professeur souhaite en sélectionner 7 pour une semaine thématique.

Partie A – Sélection de documentaires

- 1 Nombre de sélections de 7 documentaires.

On choisit 7 documentaires parmi 15 :

$$\binom{15}{7} = 6\,435.$$

Il y a 6 435 sélections.

- 2 Sélections avec exactement 3 documentaires scientifiques.

On choisit 3 scientifiques parmi 6, et 4 autres parmi les 9 restants (5 historiques + 4 artistiques) :

$$\binom{6}{3} \times \binom{9}{4} = 20 \times 126 = 2\,520.$$

Il y a 2 520 sélections.

- 3 Sélections avec au moins un documentaire artistique.

On calcule par complément. On exclut les sélections sans document artistique (donc uniquement parmi les 11 non artistiques) :

$$\binom{15}{7} - \binom{11}{7} = 6\,435 - 330 = 6\,105.$$

Il y a 6 105 sélections.

- 4 Sélections avec 2 scientifiques, 3 historiques et 2 artistiques.

On choisit dans chaque catégorie :

$$\binom{6}{2} \times \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = 15 \times 10 \times 6 = 900.$$

Il y a 900 sélections.

Partie B – Programmation

- 5 Ordre de diffusion des 7 documentaires (fixés).

On ordonne 7 documentaires :

$$7! = 5\,040.$$

Il y a 5 040 ordres différents.

- 6 Programmation sur 10 créneaux (7 documentaires et 3 libres).

On choisit les 7 créneaux parmi 10, puis on ordonne les 7 documentaires sur ces créneaux :

$$\binom{10}{7} \times 7! = 120 \times 5\,040 = 604\,800.$$

Il y a 604 800 programmations.

Partie C – Une contrainte supplémentaire

- 7 Programmations avec deux documentaires particuliers A et B consécutifs.

On considère A et B comme un seul bloc. On a donc 6 éléments à ordonner (le bloc AB et les 5 autres documentaires) : $6! = 720$. Le bloc AB peut être ordonné de 2 façons : (A, B) ou (B, A).

Nombre total : $2 \times 720 = 1\,440$.

Il y a 1 440 programmations.



La combinatoire, un outil pour aller plus loin !